# Theorie und Anwendung der impulsbasierten Dynamiksimulation

zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Naturwissenschaften**

vom Fachbereich Informatik
der Technischen Universität Darmstadt

**vorgelegte**

**Dissertation**

von

**Dipl.-Inform. Daniel Bayer**
aus Karlsruhe

| | |
|---|---|
| Tag der Einreichung: | 28. November 2012 |
| Tag der mündlichen Prüfung: | 11. Januar 2013 |
| Erster Gutachter: | Prof. Dr. J. Bender |
| Zweiter Gutachter: | Prof. Dr. A. Schmitt |

Darmstadt 2012
D 17

**Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek**
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.
**Bayer, Daniel:**
Theorie und Anwendung der impulsbasierten Dynamiksimulation
ISBN 978-3-86376-058-8


1. Auflage 2013

URL: www.optimus-verlag.de
Printed in Germany
Papier ist FSC zertifiziert (holzfrei, chlorfrei und säurefrei, sowie alterungsbeständig nach ANSI 3948 und ISO 9706)

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich zunächst meinen beiden Gutachtern, Herrn Prof. Jan Bender und Herrn Prof. Alfred Schmitt, herzlichst danken. Denn sie haben mir ermöglicht mich intensiv mit meiner wissenschaftlichen Leidenschaft, der interaktiven Dynamiksimulation, zu beschäftigen. Durch ihre große Erfahrung in diesem Bereich konnte ich dabei viele neue Einsichten gewinnen. Darüber hinaus haben mich beide stets in angenehmster Art und Weise und mit allen verfügbaren Mitteln bei meinem Forschungsvorhaben unterstützt.

Des Weiteren gilt mein Dank allen Mitarbeitern des Instituts für Betriebs- und Dialogsysteme am Karlsruher Institut für Technologie. Ich habe die gesamte Zeit am Institut genossen und hoffe auch in Zukunft in einer solch angenehmen Atmosphäre arbeiten zu dürfen. Besonders danken möchte ich dabei Herrn Dr. Raphael Diziol, der mir in zahllosen Gesprächen immer eine große Hilfe war. Daneben möchte ich allen beteiligten Mitarbeitern des Fachbereichs Informatik an der TU Darmstadt für ihre Unterstützung meiner Promotion danken.

Schließlich danke ich meiner Mutter Margret, der Familie und meinen Freunden. Denn sie alle haben mich stets mit vollen Kräften unterstützt und dabei immer an mich geglaubt. Für Hilfen in allen Lebenslagen möchte ich dabei besonders meinem Bruder Stephan und meinen Freunden Kevin Fucik, Klaus Wentz und Florian Stolz danken.

Jede Herausforderung birgt das Risiko zu scheitern. Doch aus dem festen Glauben an die eigene Bedeutung erwächst der nötige Mut und die Gelassenheit sich allen Problemen zu stellen. Dafür gilt mein ewiger Dank meiner wundervollen Frau Silke und meinen beiden Kindern Lorelei und Lennon.

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# Tabellenverzeichnis

# Sätze und Lemmata



# Definitionen



# Beispiele

# 1 Einführung

Die Dynamiksimulation beschreibt im Allgemeinen das Bewegungsverhalten von Körpern unter der Wirkung von Kräften. Dieses Teilgebiet der Physik wird als *klassische Mechanik* bezeichnet und steht in engem Zusammenhang mit vielen anderen Wissenschaftsgebieten, wie beispielsweise der Astronomie oder der Quantenmechanik.

Dabei zählt diese Disziplin wohl zu den ältesten Gebieten der Physik überhaupt und umfasst die gesamte Kulturgeschichte der Menschheit. Denn diese ist schon jeher daran interessiert und darauf angewiesen das Verhalten von Objekten in ihrer Umgebung zu verstehen und vorherzusehen.

Doch erst die Entwicklung des Computers hat diese klassischen Theorien wirklich nutzbar gemacht. Denn nur die wenigsten mechanischen Modelle lassen sich analytisch bestimmen. Die Lösung muss vielmehr stückweise erfolgen, wobei die maximal mögliche Schrittweite sehr gering und die Berechnung eines Schrittes sehr aufwändig sein kann.

Deshalb werden solche Simulationen oft von der Realzeit entkoppelt berechnet. Dadurch können mit der heute zur Verfügung stehenden Rechenleistung sehr komplexe Modelle mit hoher Genauigkeit simuliert werden. Solche Simulationen sind beispielsweise bei der Entwicklung und dem Test neuer Maschinen und Materialien integraler Bestandteil unzählbarer Anwendungen im wissenschaftlichen und industriellen Umfeld.

Heute ist es außerdem möglich auch komplexere mechanische Modelle interaktiv zu simulieren. Damit kann beispielsweise der Immersionsgrad virtueller Realitäten drastisch gesteigert werden. Diese Entwicklung wurde insbesondere durch die Computeranimation und der damit verbundenen Unterhaltungsindustrie gefördert. Dennoch spielen interaktive Simulationen auch in vielen anderen wissenschaftlichen und auch industriellen Bereichen eine große Rolle.

Die impulsbasierte Dynamiksimulation ist ein vergleichsweise junges Simulationsverfahren mechanischer Mehrkörpersysteme. Es wurde erstmals von Alfred Schmitt in einem internen Bericht der Universität Karlsruhe im Jahr 2000 beschrieben [Sch00]. Das Verfahren wurde dabei ursprünglich im Hinblick auf die interaktive Simulation autonomer mobiler Roboter in der virtuellen Realität entwickelt. Dazu wurde schon von Beginn an die These vertreten, dass in diesem Kontext Simulationsverfahren nötig sind, die möglichst genau aber in erster Hinsicht auch schnell zu berechnen sind.

In den frühen Arbeiten zu dem Verfahren wurden Starrkörperbewegungen durch verbundene Partikelsysteme rein iterativ angenähert. Solche Systeme besitzen sehr viele Abhängigkeiten, sodass die iterative Berechnung ggf. nur langsam gegen die Lösung konvergiert. Dem wurde in den Arbeiten ab 2003 Rechnung getragen, indem Teile des Verfahrens mittels zusätzlicher linearer Gleichungssysteme formuliert wurden [Sch03]. In dieser Arbeit wird außerdem erstmals die Berechnung von Starrkörpern als eigenständige Körper, anstelle verbundener Partikelsysteme, beschrieben.

Starrkörpersimulationen zählen in vielen Bereichen zu den wichtigsten Anwendungen der Mehrkörpersimulation. Dabei ist im Allgemeinen die Qualität eines Simulationsverfahrens von deutlich mehr Faktoren als der Berechnung der Bahngleichungen abhängig. So sollten beispielsweise die Simulationsmodelle möglichst allgemein und einfach konstruierbar sein. Außerdem spielt in Simulationen der virtuellen Realität auch immer eine Kollisionsbehandlung eine große Rolle. Nicht zuletzt, stellt die effiziente Implementierung einer solchen allgemeinen Simulationsplattform spezielle Anforderungen an deren Architektur.

Im Zusammenhang mit der impulsbasierten Dynamiksimulation wurden all diese Faktoren zuerst in der Dissertation von Jan Bender [Ben07a] aus dem Jahre 2007 behandelt. In dieser Arbeit wird die impulsbasierte Dynamiksimulation das erste Mal umfassend und allgemein beschrieben. Insbesondere wurden in diesem Rahmen auch diverse numerische Experimente durchgeführt. Seit dieser Arbeit sind viele weitere Arbeiten zur impulsbasierten Dynamiksimulation in unterschiedlichen Anwendungsbereichen erschienen.

Mit all diesen Arbeiten konnte sowohl die Plausibilität, als auch die Effizienz des Verfahrens empirisch bestätigt werden. Dies ist jedoch auf Dauer nicht zufriedenstellend. Denn um das Verfahren beispielsweise mit anderen Simulationsverfahren zu vergleichen, müssen diese Eigenschaften theoretisch nachgewiesen werden.

Die bisher einzige Arbeit die sich intensiv mit den theoretischen Eigenschaften des Verfahrens beschäftigt, ist [SBP05b]. In dieser Arbeit wurde auch das erste mal die Konvergenz des Verfahrens gegen die analytische Lösung der Bewegungsgleichungen gezeigt. Allerdings ist dieser Beweis nur unter speziellen Voraussetzungen gültig. Außerdem wurde keine Konvergenzordnung des Verfahrens ermittelt. Diese wurde in der Arbeit [SB05] experimentell bestimmt. Die Ergebnisse können jedoch nicht auf allgemeine Systeme übertragen werden.

Die Konvergenzfrage und weitere numerischen Eigenschaften des Verfahrens werden in dieser Arbeit umfassend theoretisch behandelt. Durch die lange Erfahrung mit dem Simulationsverfahren kann dabei insbesondere auf die speziellen anwendungsspezifischen Eigenschaften des Verfahrens eingegangen werden.

Die Arbeit schafft damit allgemein ein vertieftes Verständnis des Verfahrens. So können mit dieser Arbeit sowohl positive als auch negative praktische Erfahrungen durch die zugrundeliegenden Theorien begründet werden. Damit können Stärken des Verfahrens klar benannt und Schwächen der impulsbasierten Dynamiksimulation besser verstanden und teilweise sogar vermieden werden. Dies zeigt sich beispielsweise durch das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte verbesserte impulsbasierte Verfahren.

## 1.1. Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist grob in drei Teilen gegliedert, deren Inhalt im Folgendem kurz zusammengefasst ist.

**I. Grundlagen:** Der erste Teil der Arbeit ist den nötigen theoretischen Grundlagen gewidmet. Dazu werden in Kapitel 2 zunächst allgemeine Grundlagen der numerischen Behandlung mechanischer Mehrkörpersysteme geschaffen. Im darauffolgenden Kapitel 3 wird die Lagrange-Faktoren-Methode ausführlich beschrieben. Mit dieser Methode können die physikalisch exakten[1] inneren Kräfte eines Mehrkörpersystems berechnet werden. Zusammen mit einem konvergenten Diskretisierungsverfahren können damit asymptotisch exakte Trajektorien des Simulationsmodells berechnet werden. Im letzten Kapitel der Grundlagen werden die Bewegungsgleichungen der impulsbasierten Dynamiksimulation hergeleitet und das Verfahren in all seinen Varianten beschrieben.

**II. Theorie:** Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit den theoretischen Eigenschaften der impulsbasierten Dynamiksimulation. Dazu wird in Kapitel 5 erstmals ein umfassender Konvergenzbeweis des Verfahrens geführt. Dieser Beweis liefert neben der allgemeinen Konvergenzordnung auch differenzierte Aussagen über bestimmte Problemklassen. Das darauffolgende Kapitel 6 der Arbeit widmet sich der wiederholten Impulsberechnung. Denn das Verfahren ermöglicht, ohne zusätzliche Stabilisierungsmethoden, den Fehler in den Zwangsbedingungen zu minimieren. Dazu wird in dem Kapitel gezeigt, dass die iterierten Lösungen lokal und linear gegen eine konsistente Lösung konvergieren.

**III. Anwendung:** Der dritte Teil der Arbeit ist anwendungsspezifischen Fragen vorbehalten. Dabei werden in Kapitel 7 zunächst allgemeine Aspekte des Mehrkörpermodells und der interaktiven Simulation beschrieben. Auf dieser Basis werden im darauffolgenden Kapitel 8 die numerischen Eigenschaften der impulsbasierten Dynamiksimulation diskutiert. Dazu wird zunächst die Genauigkeit und Effizienz des Verfahrens übersichtlich dargestellt und die theoretischen Aussagen durch numerische Experimente überprüft. Darüber hinaus werden in diesem Kapitel weitere anwendungsspezifische Eigenschaften des Verfahrens diskutiert. Dazu zählt beispielsweise dessen Parallelisierbarkeit, aber ebenso die Simulation verformbarer Körper und weiteres.

Im letzten Kapitel der Arbeit werden die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und einige unbeantwortet Fragen und mögliche Verbesserungen der impulsbasierten Dynamiksimulation benannt.

[1] Exakt im Sinne der klassischen Mechanik und unter den gegebene Voraussetzungen.

# Teil I
## Grundlagen

Gib mir einen Punkt, auf dem ich stehen kann, und ich werde dir die Welt aus den Angeln heben.

*(Archimedes von Syrakus)*

# 2 Physikalisches Modell

Ein *(mathematisches) Modell* ist allgemein beschrieben als eine Menge von Objekten $\mathcal{V}$ die mittels Relationen $\mathcal{R}$ verknüpft sind:

$$\mathcal{V} = f(\mathcal{R}, \mathcal{V}).$$

Die Objekte beschreiben dabei den Zustand des Modells, welches in Abhängigkeit der Relationen in einen anderen Systemzustand übergehen kann. Werden diese Zustandsübergänge mit einem gegebenen Anfangszustand nacheinander berechnet spricht man von einer *Simulation*. Erfolgt dies mit Hilfe des Computers, spricht man im speziellen von einer *Computersimulation*.

Ein *physikalisches Modell* ist ein mathematisches Modell, dass auf den Gesetzen der Physik basiert. Mit einem solchen Modell wird immer versucht möglichst viele Eigenschaften der Realität abzubilden und gleichzeitig die Komplexität in Grenzen zu halten. Jedes physikalisches Modell ist somit eine Abwägung zwischen Genauigkeit und Aufwand und immer nur eine Idealisierung der Wirklichkeit.

Die Modelle der Dynamiksimulation begründen sich auf den Gesetzen der klassischen Mechanik. Die physikalischen Körper oder genauer deren Zustandsvariablen und die Zeit, repräsentieren dabei die Objekte des Modells. Diese stehen über die *Bewegungsgleichungen* miteinander in Verbindung. Werden die Bewegungsgleichungen für einen gegebene Anfangszustand gelöst, folgt die *Trajektorie* oder *Bahngleichung* der Körper. Diese beschreibt die räumliche Bewegung der Körper in Abhängigkeit zur Zeit.

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus den Formalismen der klassischen Mechanik. Allerdings kann die Lösung dieser Gleichungen in der Regel nicht analytisch bestimmt werden, d. h. die Bahngleichung kann nicht in geschlossener Form angegeben werden. Deshalb wird die Bewegung durch numerische Integration gelöst (vgl. Kapitel 2.7).

Es gibt eine Vielzahl unterschiedlicher Modelle zur Simulation eines Mehrkörpersystems. Im Folgenden wird das dieser Arbeit zugrundeliegende Modell näher beschrieben. Daneben werden auch davon abweichende, alternative Ansätze kurz angesprochen.

## 2.1. Reduzierte und redundante Koordinaten

Um ein Mehrkörpersystem zu beschreiben, muss zunächst bestimmt werden in welchen Koordinaten die Zustandsvariablen dargestellt werden. Dafür gibt es unterschiedliche Ansätze. Im Allgemeinen lassen sich zwei wesentlichen Darstellungen der Koordinaten unterscheiden: Die der *reduzierten Koordinaten*[1] und die der *redundanten* oder *abhängigen Koordinaten*.

Bevor die Unterschiede zwischen redundanten und reduzierten Koordinaten diskutiert werden, wird der zentrale Begriff des Freiheitsgrads definiert.

**Definition 2.1 (Freiheitsgrad)**

Als Freiheitsgrade $f$ eines Körpers wird die Anzahl der unabhängigen Parameter bezeichnet, die nötig als auch hinreichend sind, die Lage des Körpers im Raum zu beschreiben.

Als Freiheitsgrade $n$ eines $k$-Körpersystems wird die Summe aller Freiheitsgrade der einzelnen Körper bezeichnet:

$$n = \sum_{i=1}^{k} f_i.$$

**Anmerkung 2.1:**

- Die Parameter sind frei wählbar, aber die Anzahl der Parameter, also die Freiheitsgrade, ist konstant.
- In der Literatur wird häufig zwischen *Translations-* und *Rotationsfreiheitsgraden* unterschieden.
- Oft wird der Begriff Freiheitsgrad nur für die Anzahl aller Freiheitsgrade genutzt. Ein einzelner Freiheitsgrad wird dann als *Freiheit* bezeichnet.

Ein Mehrkörpersystem hat $n$ Freiheitsgrade. Diese beschreiben die *freie Bewegung* des Systems. Werden $m$ zusätzliche, nicht redundante Bedingungen an diese Bewegungen gestellt, werden $m$ Freiheitsgrade aus dem System entfernt und es verbleiben $(n - m)$ tatsächliche Freiheitsgrade. Das heißt, das unbeschränkte, freie System hat $n$ und das beschränkte $(n - m)$ Freiheitsgrade.

Wird ein solches Mehrkörpersystem mit reduzierten Koordinaten dargestellt, ist deren Anzahl immer gleich der Anzahl $(n - m)$ der tatsächlichen Freiheitsgrade. Es handelt sich also um die minimale Anzahl von Koordinaten, die nötig sind, die Bewegung zu beschreiben. Deshalb werden diese Koordinaten auch Minimalkoordinaten und die Bewegungsgleichungen *Minimalform* des mechanischen Mehrkörpersystems genannt.

Die redundanten Koordinaten hingegen sind im Allgemeinen höher dimensional, da durch Zwangsbedingungen entfernte Freiheitsgrade keine Koordinaten entfernen. Die Anzahl der benötigten Koordinaten ist also immer gleich der Anzahl $n$ der Freiheitsgrade

[1] Häufig auch als *unabhängige*, *generalisierte* oder *minimale* Koordinaten bezeichnet.